

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΠΑΝΟΥΣΑΚΗΣ ΣΩΤΗΡΙΟΣ**

1. Δίνετε η παράσταση $A = (x - 1)^3 - x(x - 1)^2 + 4 \cdot (x - 1)(x + 1) + 12 - 5 \cdot (1 - x)$

α) Να δείξετε ότι: $A = 3x^2 + 7x + 2$ και να αναλύσετε την παράσταση A σε γινόμενο παραγόντων.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $A = 12$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $A^2 = 2A$

2. Δίνονται τα κλάσματα:

$$A = \frac{x^2 + 4x + 4}{3x^2 + 6x} \quad \text{και} \quad B = \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται τα κλάσματα A και B.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $A = B$

γ) Να δείξετε ότι οι αριθμοί: $K = A \cdot \frac{9x^2 - 9x}{x + 2}$ και $\Lambda = B \cdot \frac{3x^2 + 3x - 6}{x^2 - 4}$ είναι αντίστροφοι.

3. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = (x - 3)^2 + (x + 5) \cdot (x - 2) + x \cdot (x + 1) - 7 \quad \text{και}$$

$$B = 3 \cdot (x - 1)^2 - (2 - 3x) \cdot (2x - 1) + 13x - 21$$

α) Να δείξετε ότι: $A = 3x^2 - 2x - 8$ και $B = 9x^2 - 16$

και να αναλύσετε τις παραστάσεις A και B σε γινόμενο παραγόντων.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται το κλάσμα: $\frac{A}{B}$ και να το απλοποιήσετε.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{B}{A} = x + 2$

4.α) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{2x - 3y}{5} - \frac{x - y}{2} = x - 1 \\ 2 \cdot (x - 2y) + 3y = 3 \end{cases}$$

β) Αν (x, y) η λύση του συστήματος, να δείξετε ότι:

$$(3x + 2y)^{2019} + (10x + 11y)^{2020} = x - y$$

5. Δίνονται τα κλάσματα:

$$A = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7x + 10}, \quad B = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 8x + 15} \quad \text{και} \quad \Gamma = \frac{x^2 - 2x - 3}{4x^2 + 8x + 4}$$

α) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση: $K = (B - A) \cdot \Gamma$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $B \cdot \Gamma + \Gamma : A = 0$

6. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = (x - 1)^3 - x \cdot (x^2 - 4x + 5) - 7 \quad \text{και}$$

$$B = 3 \cdot (x + 1)^2 - (2x + 7)$$

α) Να δείξετε ότι: $A = x^2 - 2x - 8$ και $B = 3x^2 + 4x - 4$

β) Να αναλύσετε τις παραστάσεις σε γινόμενο παραγόντων.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $A - B = -4$

7. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - x - 6}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .

β) Να απλοποιήσετε την παραπάνω παράσταση.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $A^2 - 6A + 9 = 0$

8. Δίνεται η παράσταση: $A = \left(\frac{3x^2 - 5x - 2}{4x^2 + 4x - 8} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} \right) - \frac{1}{x-1}$

α) Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 - 5x - 2 = 0$

β) Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{3}{4}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{3} \cdot A \cdot x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1 = 0$

9.α) Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π των παραστάσεων:

$$A = x^2 - 4x + 3$$

$$B = 2x^2 - 6x + 4$$

$$\Gamma = (x - 3) \cdot (x^2 + 4) - 4x \cdot (x - 3)$$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $A + B = 0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{A}{B} - \frac{A}{\Gamma} = 0$

12.α) Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 5x + y = -13 \end{cases}$$

β) Αν $M(x,y)$ η λύση του συστήματος, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\omega} = \widehat{MOx}$, όπου Ox , ο θετικός ημιάξονας.

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \eta\mu^2 43^\circ \cdot [\eta\mu(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu\omega] - \sigma\upsilon\nu^2 137^\circ \cdot [\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) - \eta\mu\omega]$$

13. Δίνετε η ισότητα: $\alpha\beta + 3\beta - \alpha - 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha = -3$ και $\beta = 1$

β) Αν είναι: $\alpha < x < \beta$ και $-\beta < y < \alpha$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές της παράστασης: $5x - 6y$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\alpha \cdot (x - \beta) - x \cdot (x + \alpha) = -\beta$

14. Δίνετε η εξίσωση $5x \cdot (x - 1) = 2x + 6$ και $90^\circ < \hat{\omega} < 180^\circ$.

α) Να λύσετε την εξίσωση.

β) Αν η μία λύση της εξίσωσης ισούται με το συνω, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = 5 \cdot [\text{συν}(180^\circ - \omega) + \eta\mu\omega] + 3 \cdot \epsilon\phi\omega \cdot \epsilon\phi 135^\circ$.

15.α) Να λύσετε την εξίσωση: $(x - 3)^2 - (2 - x)(2 + x) - (3 - x) = 0$

β) Αν α, β είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης με $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $A(x) = (x + \alpha)^2 - (x - \alpha)(x - \beta) - 2 \cdot \alpha(x - 5\beta) - x \cdot (\alpha + \beta)$ είναι σταθερό πολυώνυμο.

γ) Να κάνετε τις πράξεις $[9\alpha^3\beta \cdot (-2\alpha^2\beta^3)] : (6\alpha^3\beta)$

Για το μονώνυμο που προκύπτει από τις παραπάνω πράξεις, να βρείτε το συντελεστή και το κύριο μέρος του. Να υπολογίσετε την τιμή του μονωνύμου για $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = 2$.

16. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - 2}{x + 2} - \frac{2x - x^2}{x^2 - 4} \quad \text{και} \quad B = \frac{xy^2 + 10xy + 25x}{y^2 + 3y - 10} : \frac{x}{2y - 4}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x και του y , για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις A και B αντίστοιχα.

β) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις και να αποδείξετε ότι: $A = x - 1$ και $B = 2y + 10$

γ) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ \frac{A}{2} + \frac{B}{7} = 1 \end{cases}$$

17. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2 123^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 154^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 57^\circ + \eta\mu^2 26^\circ$$

$$B = \eta\mu 50^\circ \cdot \eta\mu 130^\circ - \sigma\upsilon\nu 130^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 50^\circ$$

$$\Gamma = \eta\mu(40^\circ + \omega) + \sigma\upsilon\nu(50^\circ - \varphi) - \eta\mu(140^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu(130^\circ + \varphi)$$

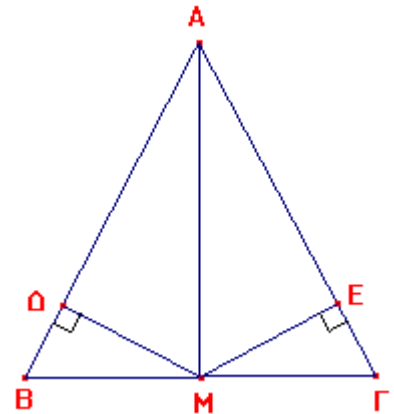
α) Να αποδείξετε ότι: $A = 2$, $B = 1$ και $\Gamma = 0$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x-A}{x-B} + \frac{x-B}{\chi+B} = \frac{A+\Gamma}{B-x^2}$

18. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και το M είναι μέσο της βάσης $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αποστάσεις $M\Delta$ και ME του σημείου M από τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, είναι ίσες.

β) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔME .



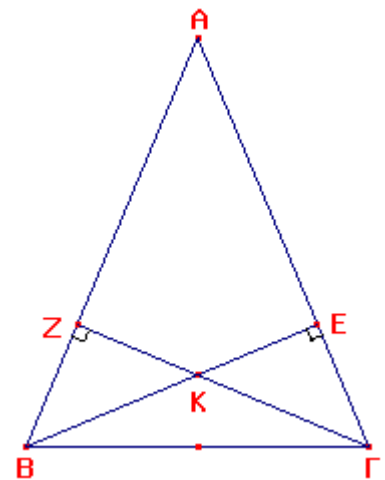
19. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, φέρνουμε τα ύψη BE και ΓZ που τέμνονται στο σημείο K .

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma Z$.

β) Τα τρίγωνα ZBK και EKG είναι ίσα.

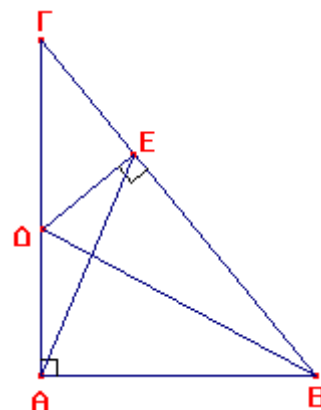
γ) Το τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



20. Δίνετε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της $A\Gamma$.

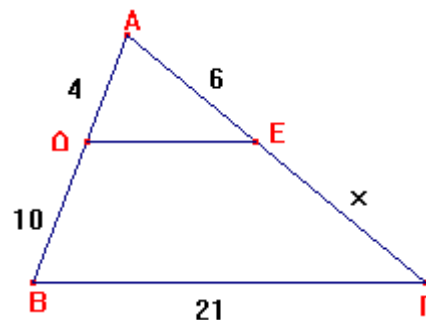
Φέρνουμε από το Δ την απόσταση ΔE προς την $B\Gamma$,
έτσι ώστε $\Delta E = \Delta A$. Να αποδείξετε ότι:

- Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B .
- Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AE .
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τα όμοια αυτά τρίγωνα.



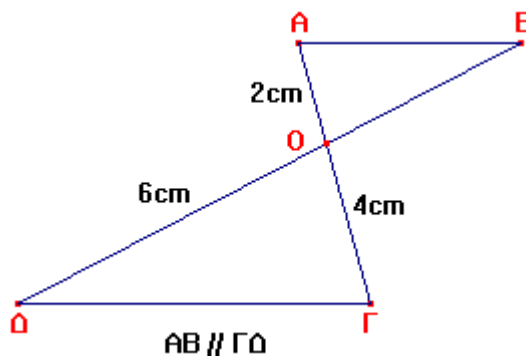
21. Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E // B\Gamma$, $A\Delta = 4\text{cm}$,
 $\Delta B = 10\text{cm}$, $B\Gamma = 21\text{cm}$ και $A E = 6\text{cm}$.

- Να υπολογίσετε το τμήμα ΓE .
- Να υπολογίσετε το τμήμα ΔE .
- Αν το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι 8cm^2 ,
να υπολογίσετε το εμβαδόν του $\Delta E\Gamma B$.



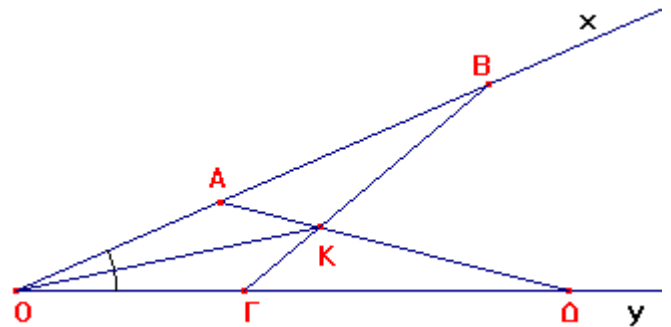
22. Στο διπλανό σχήμα η AB είναι παράλληλη
προς την $\Gamma\Delta$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$
είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους
που προκύπτουν από την ομοιότητα αυτή.
- Αν είναι $AO = 2\text{cm}$, $O\Gamma = 4\text{cm}$, $O\Delta = 6\text{cm}$ και
η περίμετρος του τριγώνου OAB είναι 9cm , να βρείτε τον λόγο ομοιότητας λ
του τριγώνου $O\Delta\Gamma$ προς το τρίγωνο OAB και το μήκος των πλευρών OB και AB .
- Αν το εμβαδόν του τριγώνου $(O\Delta\Gamma) = 27\text{cm}^2$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του
τριγώνου (OAB) .



23. Δίνετε γωνία \widehat{xOy} και στις πλευρές Ox και Oy παίρνουμε τα σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα, έτσι ώστε, $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Αν K είναι η τομή των $A\Delta$ και $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $O\Delta A$ και $O\Gamma B$ είναι ίσα και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους.
 β) Τα τρίγωνα ABK και $K\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
 γ) Η OK είναι διχοτόμος της γωνίας \widehat{xOy} .



24.α) Να βρείτε το σημείο M στο οποίο τέμνονται οι ευθείες με εξισώσεις:

$$\varepsilon_1 : 3x + y = 7 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 2x - 3y = 1$$

- β) Αν $M(2, 1)$ είναι το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η ευθεία με εξίσωση $\varepsilon : (\lambda - 2)x - (1 - \lambda)y = 4$ διέρχεται από το σημείο M .
 γ) Για $\lambda = 3$ να βρείτε τα σημεία που η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

25.α) Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 59 \\ 3x - 2y = -11 \end{cases}$$

- β) Αν $(x, y) = (5, 13)$ είναι η λύση του παραπάνω συστήματος και η $\widehat{\omega}$ είναι μία αμβλεία γωνία με $\eta\mu\omega = \frac{x}{y}$ να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την $\varepsilon\varphi\omega$.

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = -12 \cdot \varepsilon\varphi(180 - \omega) + (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 + [\eta\mu(180 - \omega) + \sigma\upsilon\nu(180 - \omega)]^2$$